

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
Львівський національний університет імені Івана Франка

Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної математики

ПРОГРАМА КУРСУ

«Методи дослідження та наближеного розв'язування
операторних рівнянь та некоректних задач»

Напрямок: прикладна математика

Факультет: прикладна математика та інформатика

Форма навчання: денна

Витяг з навчального плану

Курс	Семестр	Кількість кредитів	Загальний обсяг (год.)	Всього аудит. (год.)	у тому числі (год.):			Самостійна робота (год.)	Контрольні (модульні) роботи (шт.)	Розрахунково-графічні роботи (шт.)	Курсові проекти (роботи), (шт.)	Залік (сем.)	Екзамен (сем.)
					Лекції	Лабораторні	Практичні						
3	5-6	6	216	106	53	53	–	110	2	–	–	+	+

1. Анотація

У спеціальному курсі розглядаємо: формулювання математичних проблем у операторному вигляді; поняття коректної та некоректної постановки задач; компактні множини та цілком неперервні оператори; елементи теорії Рісса-Шаудера; нормально розв'язні оператори – нетерові та фредгольмові; операторні рівняння з точки зору обчислень; загальну теорію наближених схем – апроксимація просторів, операторів, умова стійкості; продовження

наближених розв'язків; регуляризуючі алгоритми для некоректно поставлених задач; методи наближеного розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з погано обумовленими матрицями; методи мінімізації згладжуючого функціоналу – рівняння Ейлера; вибір оптимального значення параметра регуляризації; конкретні некоректні задачі; інтегральні рівняння із логарифмічною особливістю в ядрі.

2. Зміст програми

2.1. Компактні множини та цілком неперервні оператори.

Тема 1. Бікомпактні та компактні множини. Бікомпактні множини та їх властивості. Компактні множини в нормованих просторах. Критерій компактності Гаусдорфа. Критерій компактності в просторі неперервних функцій. Теорема Арцела.

Тема 2. Цілком неперервні оператори. Означення цілком неперервного оператора. Властивості цілком неперервних операторів. Приклади цілком неперервних операторів. Теорема Шаудера.

Тема 3. Елементи теорії Рісса-Шаудера. Елементи теорії Рісса-Шаудера операторних рівнянь другого роду. Перелік ситуацій, що виникають при аналізі розв'язуваності операторних рівнянь другого роду. До теорії операторних рівнянь першого роду.

2.2. Інтегральні рівняння 1-го роду зі слабкими особливостями в ядрах.

Тема 4. Канонічне інтегральне рівняння. Проблеми сучасного природознавства, які формують у вигляді інтегральних рівнянь 1-го роду зі слабкими особливостями в ядрах. Обрання та дослідження пар просторів, у яких можна розглядати відповідні інтегральні оператори.

Тема 5. Проблема зведення до рівняння 2-го роду. Неперервна оборотність головної частини початкового інтегрального рівняння. Диференціювання інтегралів за параметром. Інтеграл типу Коші. Розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь.

Тема 6. Аналіз розв'язуваності. Отримання еквівалентного інтегрального рівняння другого роду. Дослідження його розв'язуваності у модифікованих просторах Гьольдера на підставі теорії Рісса-Шаудера.

2.3. Нормально розв'язувальні лінійні оператори.

Тема 7. Деякі загальні властивості лінійних операторів. Дві основні теореми, які виражають загальні властивості лінійних операторів. Нормально розв'язувальні оператори. Критерій нормальної розв'язувальності лінійного оператора. Приклади таких операторів.

Тема 8. Нетерові та фредгольмові оператори. Число нулів, дефект та індекс лінійного оператора. Означення нетерових та фредгольмових операторів. Класичні теореми Нетер та Фредгольма.

Тема 9. Критерії фредгольмовості . Актуальність проблеми. Допоміжний результат-лема Е. Шмідта. Вичерпна характеристика класу обмежених фредгольмових операторів. Теорема С. Нікольського.

2.4. Лінійні операторні рівняння з точки зору обчислень.

Тема 10. Абсолютна і відносна похибки обчислення елемента та оператора. Означення абсолютної та відносної похибки при обчисленні елемента абстрактного нормованого простору та оператора. Міра обумовленості лінійного оператора. Важливість цього поняття з точки зору наближеного розв'язування операторних рівнянь.

Тема 11. Коректність лінійного операторного рівняння. Коректність лінійного рівняння з неперервно оборотним оператором. Оцінка відносної похибки розв'язку.

2.5. Методи розв'язування некоректних задач.

Тема 12. Некоректні задачі. Поняття коректності. Приклади некоректно поставлених задач. Регуляризуючий оператор. Класичні способи розв'язування некоректних задач.

Тема 13. Метод регуляризації А.М.Тихонова. Варіаційний метод регуляризації. Його теоретичне обґрунтування. Рівняння Ейлера. Вибір оптимального значення регуляризуючого параметра. Наближений метод мінімізації згладжуючого функціоналу.

Тема 14. Приклади розв'язування некоректно поставлених задач. Проблема згладжування експериментально отриманої функції. Задача диференціювання функції, що надійшла з експерименту. Розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь з погано обумовленими матрицями.

2.6. Загальна теорія наближених схем.

Тема 15. Проблема апроксимації. Апроксимація банахових просторів та лінійних операторів. Умова стійкості. Порядок апроксимації елемента послідовністю. Апроксимація конкретних банахових просторів та лінійних операторів.

Тема 16. Теорема про збіжність наближеної схеми. Формулювання та доведення основної теореми про збіжність наближеної схеми. Продовження наближених розв'язків. Сплайни. Застосування теореми до побудови та аналізу методу Гальоркіна.

Тема 17. Приклади розв'язування конкретних задач. Побудова та аналіз схеми для розв'язування однієї крайової задачі. Аналіз наближеної схеми розв'язування інтегрального рівняння другого роду з неперервним ядром.

Основна література

1. **Треногин В.А.** Функциональный анализ. – М.: Физматлит, 2002. – 488 с.
2. **Хатсон В., Пим Дж.** Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983. – 432 с.

Додаткова література

1. **Остудін Б.А., Шинкаренко Г.А.** Методи функціонального аналізу в обчислювальній математиці: Навчальний посібник. – Львів: Світ поліграфія, 1998. – 184 с.
2. **Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С.** Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
3. **Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П.** Методы решения задач по функциональному анализу. – К.: Вища школа, 1990. – 479 с.
4. **Гаврилюк І.П., Макаров В.Л.** Методи обчислень. – К.: Вища школа, 1995. – 367 с.
5. **Вагін П.П., Остудін Б.А., Шинкаренко Г.А.** Основи функціонального аналізу: Курс лекцій. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2005. – 140с.
6. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
7. **Полищук А.Д.** О численном решении интегральных уравнений теории потенциала. Препринт. – Новосибирск: Вычислительный центр СО АН СССР, 1987. – 26 с.
8. **Обэн Ж.-П.** Приближенное решение эллиптических краевых задач. – М.: Мир, 1977. – 383 с.
9. **Остудін Б.А., Хапко Р.С.** Застосування теорії операторів до аналізу інтегральних рівнянь: Текст лекцій. – Львів: ЛДУ, 1995. – 51 с.

Програму склав доцент Остудін Б.А.